RISOLUZIONE ESERCIZIO SULLO STUDIO DI FUNZIONE

In questo documento (liberamente scaricabile) troverai la risoluzione di un esercizio svolto da me (Nicola Tarantino) di analisi matematica sullo studio di funzione.

Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$,
$x^2 - x + \frac{1}{k} e^x \neq 0$.

$x^2 - x + \frac{1}{k} e^x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k} e^x \neq x - x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{k} \neq \frac{x - x^2}{e^x}$.

Posto $f(x) = \frac{x - x^2}{e^x}$, studiamo tale funzione disegnandone il grafico approssimativo, in modo tale da determinare per quali valori di k la retta $y = \frac{1}{k}$ non interseca il grafico della funzione f(x).

Il dominio di f(x) è chiaramente tutto $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ($y = 0$ è un asintoto verticale destro).

f(x) interseca l'asse x nei punti (0, 0) e (1, 0).

$f(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$,
$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1$.

$f'(x) = (x^2 - 3x + 1)\, e^{-x}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ v $x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ (f(x) è strettamente crescente se $x < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ v $x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$),

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ (f(x) è strettamente decrescente se $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$).

$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo e $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo.

$f''(x) = -(x - 4)(x - 1)\, e^{-x}$.

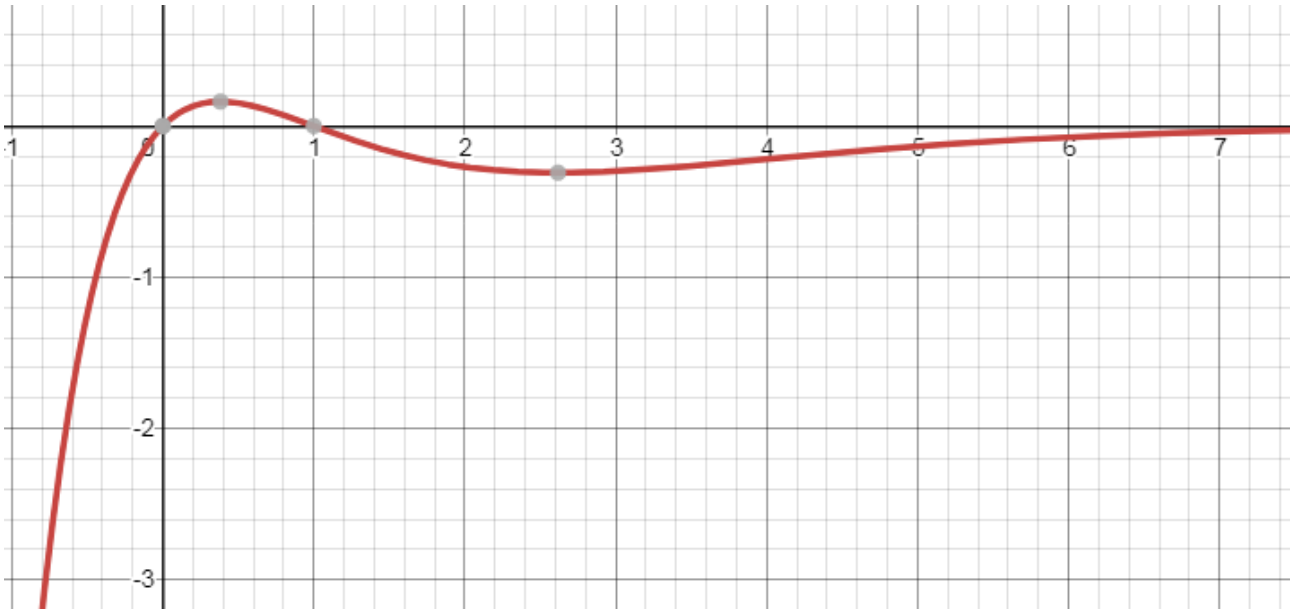
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ v $x = 4$.

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4$ (f(x) è convessa se $1 < x < 4$),

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$ v $x > 4$ (f(x) è concava se $x < 1$ v $x > 4$).

$x = 1$ è un punto di flesso ascendente a tangente obliqua e $x = 4$ è un punto di flesso discendente a tangente obliqua.

Da tali informazioni è possibile tracciare un grafico approssimativo della funzione f(x)



Dal grafico si evince che la retta $y = \frac{1}{k}$ non incontra il grafico della funzione f(x) se

$\frac{1}{k} > f(\frac{3-\sqrt{5}}{2}) = (\sqrt{5} - 2)\, e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}$ e quindi se

$0 < k < (\sqrt{5} + 2)\, e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \simeq 6.2065270384.$