RISOLUZIONE ESERCIZIO SULLA PARABOLA

In questo documento (liberamente scaricabile) troverai la risoluzione di un esercizio svolto da me (Nicola Tarantino) di analisi matematica sulla parabola per liceo scientifico.

Considera la parabola γ con l'asse coincidente con l'asse y, avente come vertice il punto V(0; -4) e passante per A(4; 0). Traccia la retta t tangente in A, considera un punto P sull'arco AV di γ e, indicata con Q la proiezione su t, calcola:

$$\lim_{P \to A} \frac{\overline{PQ}}{\overline{PA}}.$$

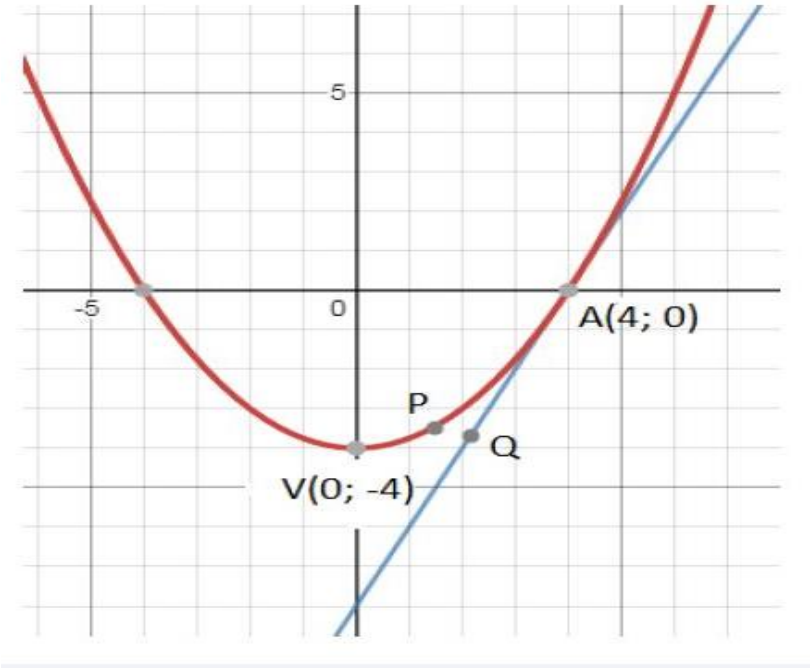
Determiniamo l'equazione della parabola γ di vertice V(0; -4) e passante per A(4; 0). L'equazione di γ è della forma $y = ax^2 + bx + c$. Imponendo il passaggio per i punti V ed A otteniamo le condizioni $-4 = c$ e $0 = 16a + 4b + c$, da cui si ottiene $c = -4$ e $b = 1 - 4a$. Inoltre, l'ascissa del vertice della parabola $-\frac{b}{2a} = 0$, quindi $b = 0$. Da ciò otteniamo che $a = \frac{1}{4}$, $b = 0$, $c = -4$. Quindi la parabola γ ha equazione $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$.

Determiniamo ora l'equazione della retta t tangente alla parabola γ in A.

Poichè la retta t passa per A, è del tipo $y = m(x - 4)$, dove m è il coefficiente angolare di t. Sostituendo $y = m(x - 4)$ nell'equazione della parabola, si ottiene $m(x - 4) = \frac{1}{4}x^2 - 4$, da cui $\frac{1}{4}x^2 - 4 - mx + 4m - 4 = 0$, ossia $x^2 - 4mx + 16m - 16 = 0$.

Poichè t deve essere tangente a γ, $\frac{\Delta}{4} = 4m^2 - 16m + 16 = 0$, cioè $(2m - 4)^2 = 0$, pertanto $m = 2$. Dunque l'equazione della retta tangente t alla parabola γ è $y = 2x - 8$.

Prendiamo $P(x;\ \frac{1}{4}x^2 - 4)$ sull'arco AV di γ e sia Q la proiezione di P su t. Allora la distanza di P da Q è uguale alla distanza di P da t, e utilizzando la formula della distanza di un punto da una retta si ottiene $\overline{PQ} = d(P;\ t) = \frac{(x-4)^2}{4\sqrt{5}}$.

$\overline{PA}$ è pari alla distanza di P da A, e utilizzando la formula della distanza tra due punti, si ottiene $\overline{PA} = \frac{|x-4|\sqrt{1+(x+4)^2}}{16}$.

$$\lim_{P\to A} \frac{\overline{PQ}}{\overline{PA}} = \lim_{x\to 4} \frac{\frac{(x-4)^2}{4\sqrt{5}}}{\frac{|x-4|\sqrt{1+(x+4)^2}}{16}} = \lim_{x\to 4} \frac{4\,|x-4|}{\sqrt{5}\,\sqrt{1+(x+4)^2}} = 0.$$