# RISOLUZIONE ESERCIZIO SULLA CONVERGENZA DI UNA SERIE NUMERICA AL VARIARE DI UN PARAMETRO REALE

In questo documento (liberamente scaricabile) troverai la risoluzione di un esercizio svolto da me (Nicola Tarantino) sulla convergenza di una serie numerica al variare di un parametro reale. Per risolvere l'esercizio ho utilizzato due metodi. Con il primo metodo ho fatto utilizzo dei vari criteri di convergenza delle serie numeriche e con il secondo metodo ho utilizzato le proprietà sulle serie di potenze che permettono di risolvere l'esercizio in modo molto più rapido rispetto al primo metodo.

Studiare al variare del parametro reale x il carattere della seguente serie numerica: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2+nx^n}{2^n+\sqrt{n}}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2+nx^n}{2^n+\sqrt{n}}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{2^n+\sqrt{n}}.$$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$ è una serie a termini positivi ed è asintotica alla serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ di ragione $\frac{1}{2}$, con $\left|\frac{1}{2}\right|<1$, pertanto risulta essere convergente.

Studiamo al variare di $x\in\Re$ il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{2^n+\sqrt{n}}$.

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{nx^n}{2^n+\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n|x|^n}{2^n+\sqrt{n}}$ che risulta essere a termini non negativi.

Tale serie risulta asintotica alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{|x|}{2}\right)^n$ e $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n\left(\frac{|x|}{2}\right)^n}=\frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\frac{|x|}{2}$.

Se $\frac{|x|}{2}<1$, cioè $-2<x<2$, per il criterio della radice, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n|x|^n}{2^n+\sqrt{n}}<+\infty$;

dunque la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{2^n+\sqrt{n}}$ converge assolutamente e di conseguenza per il criterio della convergenza assoluta converge.

Se $\frac{|x|}{2}>1$, cioè $x<-2 \vee x>2$, per il criterio della radice, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n|x|^n}{2^n+\sqrt{n}}=+\infty$.

Se $x>2$, $|x|=x$, dunque $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{2^n+\sqrt{n}}=+\infty$.

Se $x=2$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n2^n}{2^n+\sqrt{n}}$ che è chiaramente una serie a termini positivi ed è asintotica alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty}n=+\infty$.

Se $x\leq-2$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{2^n+\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n(-x)^n}{2^n+\sqrt{n}}$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n(-x)^n}{2^n+\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n n\left(\frac{-x}{2}\right)^n=\begin{cases}+\infty & \text{se } n \text{ è pari}\\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari}\end{cases}$ e ciò vuol dire che tale limite non esiste; pertanto non risulta verificata la condizione necessaria di convergenza e quindi la serie non converge, in particolar modo è indeterminata.

In definitiva abbiamo che la serie converge se $-2<x<2$, diverge positivamente se $x\geq2$ ed è indeterminata se $x\leq-2$.

**OSSERVAZIONE**

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n+\sqrt{n}}x^n$ è una serie di potenze di centro $x_0=0$ e raggio di convergenza $r=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n+\sqrt{n}}}}=2$,

dove l'insieme di convergenza della serie è l'intervallo aperto $(x_0-r,x_0+r)=(-2,2)$.