RISOLUZIONE ESERCIZIO SUL CALCOLO DI UN LIMITE DI UNA FUNZIONE

In questo documento (liberamente scaricabile) troverai la risoluzione di un esercizio svolto da me (Nicola Tarantino) di analisi matematica sul limite di una funzione. Per questo esercizio ho proposto tre possibili soluzioni: la prima soluzione utilizzando il Teorema di de L'Hopital, la seconda soluzione utilizzando la formula di Taylor con resto di Peano e la terza soluzione utilizzando un metodo ad hoc senza fare utilizzo dei precedenti metodi.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

SOLUZIONE 1

Per il teorema de l'Hopital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

SOLUZIONE 2

Dalla formula di Taylor con resto di Peano si ha che $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, di conseguenza

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{x}}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}} = -\frac{1}{6} \quad \left(\text{per definizione } \lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0\right)$$

SOLUZIONE 3

Pongo $I = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$. Se $t = 2x$, $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$. Dunque

$$I = \lim_{t \to 0} \frac{\sin 2t - 2t}{8t^3} = \frac{1}{8} \lim_{t \to 0} \frac{2\sin t \cos t - 2t}{t^3}.$$

$$6I = 8I - 2I = \lim_{t \to 0} \frac{2\sin t \cos t - 2t}{t^3} - \lim_{t \to 0} \frac{2\sin t - 2t}{t^3} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2\sin t \cos t - 2\sin t}{t^3} = \lim_{t \to 0} \frac{2\sin t(\cos t - 1)}{t^3} =$$

$$= -2 \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{\to 1} \underbrace{\frac{1 - \cos t}{t^2}}_{\to \frac{1}{2}} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1.$$

Quindi $6I = -1 \Rightarrow I = -\frac{1}{6}$.