RISOLUZIONE ESERCIZIO DI GEOMETRIA ANALITICA SULLE CONICHE

In questo documento (liberamente scaricabile) troverai la risoluzione di un esercizio svolto da me (Nicola Tarantino) di geometria analitica sulle coniche.

Classificare la conica di equazione $x^2+2xy+2y^2-8=0$ e ridurla in forma canonica determinando esplicitamente la trasformazione di coordinate. Determinare inoltre per quali valori di k l'insieme $E=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+2xy+2y^2-8 \leq 0\}$ è contenuto nell'insieme $F=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x+y)^3 \leq k\}$.

SOLUZIONE 1° PARTE

La matrice rappresentativa della conica $x^2+2xy+2y^2-8=0$ è la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$. Posto $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, gli invarianti della conica sono $I_1=tr(B)=1+2=3$, $I_2=det(B)=1$, $I_3=det(A)=-8$.

Essendo $I_3 \neq 0$, $I_2>0$ e $I_1 I_3<0$, la conica $x^2+2xy+2y^2-8=0$ è un ellisse reale.

Determiniamo gli autovalori e gli autovettori di B.

$$\det(B-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ \lambda^2-3\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1-\frac{3+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 2-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}=$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}=$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{5}}{2}x+y=0 \\ x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}y=0 \end{cases}\}=$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}=<(2,1+\sqrt{5})>.$$

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1-\frac{3-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 2-\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}=$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}=$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x + y = 0 \\ x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}y = 0 \end{cases} \} =$$

$=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}=<(2, 1-\sqrt{5})>.$

Da ciò segue che l'autovettore associato all'autovalore $\lambda=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è $\overrightarrow{v_1}=(2, 1+\sqrt{5})$ e l'autovettore associato all'autovalore $\lambda=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è $\overrightarrow{v_2}=(2, 1-\sqrt{5})$.

Siano $\overrightarrow{u_1}=\frac{\overrightarrow{v_1}}{|\overrightarrow{v_1}|}=(\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}})$ e

$\overrightarrow{u_2}=\frac{\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_2}|}=(\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}})$.

La matrice di rotazione

$$P=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$$

è una matrice ortogonale, dunque

$$P^{-1}=P^T=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix},$$

quindi

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}x + \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}y \\ Y = \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}x + \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}y \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}X + \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}Y \\ y = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}X + \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}Y \end{cases}$$

Sostituendo le coordinate x, y appena trovate nell'equazione dell'ellisse otteniamo

$$\left(\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}X + \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}Y\right)^2+$$

$$+2\left(\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}X + \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}Y\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}X + \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}Y\right)+$$

$$+2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}X + \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}Y\right)^2-8=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{10-2\sqrt{5}}X^2 + \frac{4}{10+2\sqrt{5}}Y^2+\frac{8}{\sqrt{80}}XY+\frac{4(1-\sqrt{5})}{10-2\sqrt{5}}X^2+\frac{4(1+\sqrt{5})}{\sqrt{80}}XY+$$

$+\frac{4(1-\sqrt{5})}{\sqrt{80}}XY+\frac{4(1+\sqrt{5})}{10+2\sqrt{5}}Y^2+\frac{2(6-2\sqrt{5})}{10-2\sqrt{5}}X^2+\frac{2(6+2\sqrt{5})}{10+2\sqrt{5}}Y^2-\frac{16}{\sqrt{80}}XY-$
$-8=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{20-8\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}X^2+\frac{20+8\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}Y^2-8=0 \Leftrightarrow \frac{10-4\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}X^2+\frac{10+4\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}Y^2-8=0$
$\Leftrightarrow \frac{(10-4\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{20}X^2+\frac{(10+4\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{20}Y^2-8=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{30-10\sqrt{5}}{20}X^2+\frac{30+10\sqrt{5}}{20}Y^2-8=0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}X^2+\frac{3+\sqrt{5}}{2}Y^2-8=0$

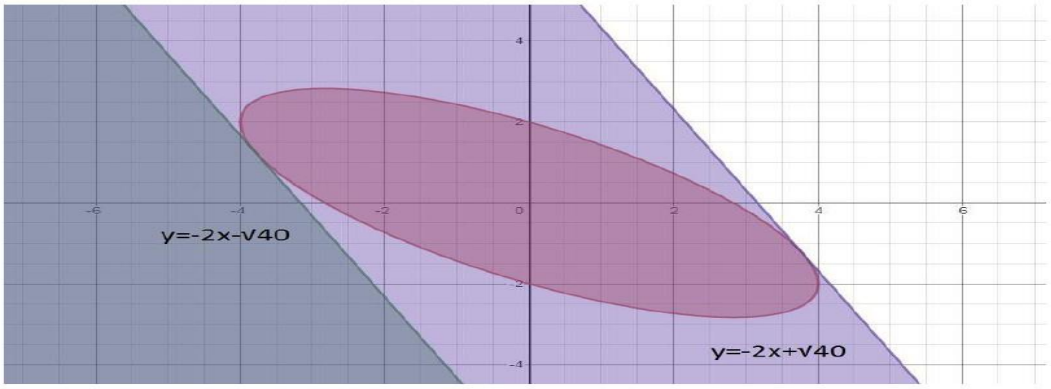
SOLUZIONE 2° PARTE

$F=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x+y)^3 \leq k\}=$

$=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+y \leq \sqrt[3]{k}\}$.

Poniamo $q=\sqrt[3]{k}$. Vediamo per quali valori di q la retta $y=-2x+q$ è tangente all'ellisse di equazione $x^2+2xy+2y^2-8=0$. Sostituendo $y=-2x+q$ nell'equazione dell'ellisse si ottiene $5x^2-6qx+2q^2-8=0$. La condizione di tangenza è che il discriminante/4 (in questo caso $b=6q$ è pari) di questo polinomio di secondo grado nella variabile x sia nullo, ossia che $9q^2-5(2q^2-8)=0$, cioè $q^2=40$ e quindi $q=\pm\sqrt{40}$. Affinchè l'insieme E sia contenuto nell'insieme F la retta "deve stare tutta a destra rispetto

all'ellisse", di conseguenza deve essere $q>0$, pertanto $q=\sqrt{40}$, ossia $k=q^3=80\sqrt{10}$.



https://www.math4you.online/