RISOLUZIONE ESERCIZIO DI GEOMETRIA ANALITICA SULLA CIRCONFERENZA

In questo documento (liberamente scaricabile) troverai la risoluzione di un esercizio svolto da me (Nicola Tarantino) di geometria analitica del piano sulla circonferenza.

Determina la circonferenza tangente in A (0, 2) alla retta di equazione $y = \frac{2}{3}x + 2$ e passante per B (1, 3). Traccia per A la normale alla circonferenza che la interseca ulteriormente nel punto D. Calcola il perimetro e l'area del triangolo ABD.

Una circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Imponendo il passaggio per i punti A e B (cioè sostituendo nell'equazione della circonferenza a x e ad y prima le coordinate di A e poi di B e mettendo le due relazioni a sistema), si ottiene che $a = - b - 6$ e $c = - 2b - 4$. Pertanto l'equazione della circonferenza diventa

$x^2 + y^2 - (b + 6)x + by - 2b - 4 = 0$.

Inoltre la circonferenza è tangente alla retta $y = \frac{2}{3}x + 2$ nel punto A(0, 2), pertanto sostituendo $y = \frac{2}{3}x + 2$ nell'equazione della circonferenza, si ottiene la relazione

$\frac{13}{9}x^2 - (\frac{10}{3} + \frac{1}{3}b)x = 0$ e quindi

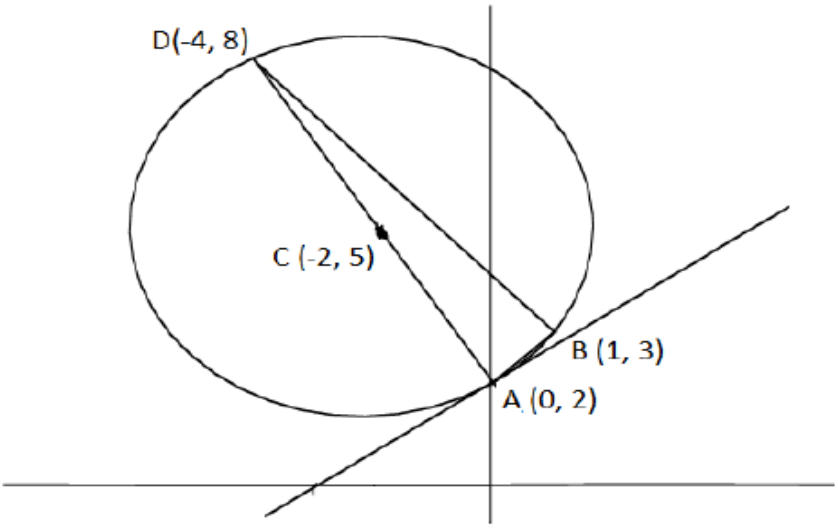
$x(\frac{13}{9}x - \frac{10}{3} - \frac{1}{3}b) = 0$, di conseguenza $x = 0$ oppure

$\frac{13}{9}$ x - $\frac{10}{3}$ - $\frac{1}{3}$ b = 0 e poichè la retta è tangente alla circonferenza nel punto A (0, 2), necessariamente bisogna avere che il punto x=0 ha molteplicità algebrica pari a 2, quindi 10 + b = 0, ovvero b = - 10. Dunque la circonferenza ha equazione

$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 16 = 0$. Segue che il centro della circonferenza è C$(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$=(-2, 5) e il raggio è $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - 16} = \sqrt{13}$.

La normale alla circonferenza passante per A, non è nient'altro che la retta perpendicolare alla retta $y = \frac{2}{3}x + 2$ e passante per il punto A (0, 2). Il segmento AD non è nient'altro che il diametro della circonferenza, quindi AD=$2\sqrt{13}$ e il centro C (-2, 5) della circonferenza è il punto medio dei punti A e D, dunque (-2, 5) = $(\frac{x_D+0}{2}, \frac{y_D+2}{2})$, da cui si ottiene che D (x_D, y_D) = (-4, 8). Pertanto utilizzando la

formula della distanza tra due punti si ottiene che AB=$\sqrt{2}$, BD=5$\sqrt{2}$.

Indicando con 2p il perimetro, si ha che 2p = AB + BD + AD = 6$\sqrt{2}$ + 2$\sqrt{13}$ e perciò il semiperimetro p = 3$\sqrt{2}$ + $\sqrt{13}$. Dalla formula di Erone l'area del triangolo vale

A = $\sqrt{p(p-AB)(p-BD)(p-AD)}$ = 5.