RISOLUZIONE ESERCIZIO DI ALGEBRA LINEARE

In questo documento (liberamente scaricabile) troverai la risoluzione di un esercizio svolto da me (Nicola Tarantino) di algebra lineare sui sottospazi vettoriali. Con questo esercizio si propone un esempio concreto in cui l'unione di due sottospazi vettoriali non è un sottospazio vettoriale.

Si consideri $U=\{(x,y)\epsilon\mathbf{C}^2|x^2+10y^2=0\}$:

1) Stabilire se U è un sottospazio vettoriale complesso di $\mathbf{C}^2$;
2) Determinare V e W sottospazi vettoriali complessi di $\mathbf{C}^2$ tali che $U=V\bigcup W$;
3) Dire se esistono U_1 e U_2 sottospazi vettoriali complessi di $\mathbf{C}^2$ tali che $U=U_1\bigcap U_2$.

1) $U=\{(x,y)\epsilon\mathbf{C}^2|x^2+10y^2=0\}=\{(x,y)\epsilon\mathbf{C}^2|(x+i\sqrt{10}\,y)(x-i\sqrt{10}\,y)=0\}=\{(x,y)\epsilon\mathbf{C}^2|x=\pm i\sqrt{10}\,y\}$.
Le coppie di punti $(\sqrt{10}\,i,1),(-\sqrt{10}\,i,1)\epsilon U$; ma $(\sqrt{10}\,i,1)+(-\sqrt{10}\,i,1)=(0,2)\notin U$,
pertanto U non è un sottospazio vettoriale complesso di $\mathbf{C}^2$.
2) $U=\{(x,y)\epsilon\mathbf{C}^2|x+i\sqrt{10}\,y=0\}\bigcup\{(x,y)\epsilon\mathbf{C}^2|x-i\sqrt{10}\,y=0\}$,
di conseguenza posti $V=\{(x,y)\epsilon\mathbf{C}^2|x+i\sqrt{10}\,y=0\}$ e $W=\{(x,y)\epsilon\mathbf{C}^2|x-i\sqrt{10}\,y=0\}$,
si ha che V e W sono sottospazi vettoriali complessi di $\mathbf{C}^2$.
Infatti dati $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\epsilon V$, si ha che $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)\epsilon V$, poichè
$(x_1+x_2)+i\sqrt{10}\,(y_1+y_2)=(x_1+i\sqrt{10}\,y_1)+(x_2+i\sqrt{10}\,y_2)=0+0=0.$

$\uparrow$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\epsilon V$

Inoltre se $(x,y)\epsilon U$ e $\lambda\epsilon\mathbf{C}$, $\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)\epsilon V$, poichè $\lambda x+i\sqrt{10}\,\lambda y=\lambda(x+i\sqrt{10}\,y)=\lambda\cdot 0=0$

$\uparrow$

$(x,y)\epsilon V$

Ciò prova che V è un sottospazio vettoriale complesso di $\mathbf{C}^2$.
In maniera del tutto analoga si dimostra che anche W è un sottospazio vettoriale complesso di $\mathbf{C}^2$.
3) Poichè l'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale, non essendo U un sottospazio vettoriale complesso di $\mathbf{C}^2$, U non può essere espresso come intersezione di due sottospazi vettoriali complessi di $\mathbf{C}^2$.